

高 2025 届高一下 3 月阶段性测试

考试时间：120 分钟

第 I 卷（选择题）

一、单项选择题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

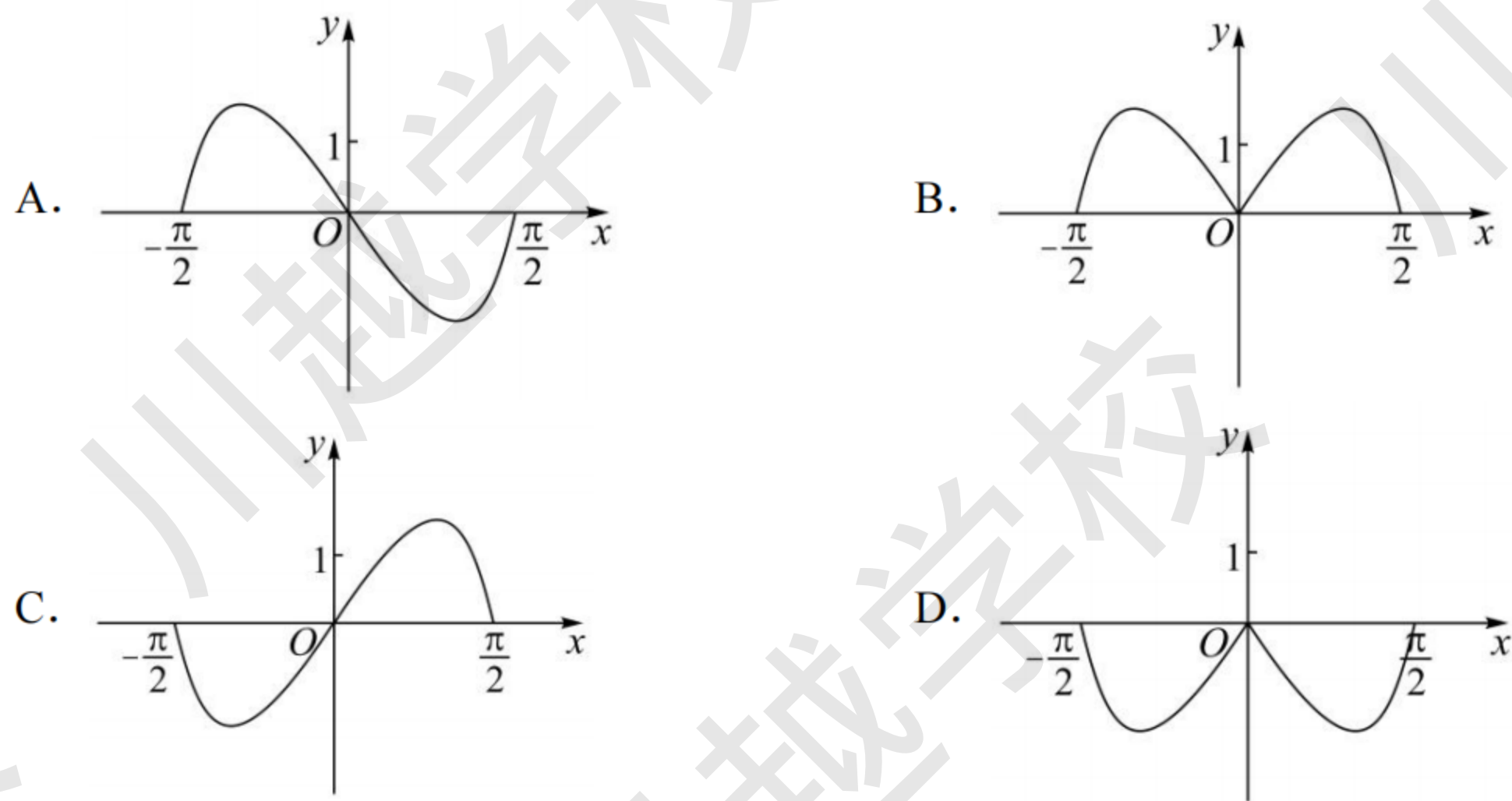
1. $\sin 15^\circ \cos 15^\circ =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{4}$

2. 关于向量 \vec{a} , \vec{b} , 下列命题中, 正确的是 ()

- A. 若 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, 则 $\vec{a} = \vec{b}$ B. 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, $\vec{b} \parallel \vec{c}$, 则 $\vec{a} \parallel \vec{c}$
 C. 若 $|\vec{a}| > |\vec{b}|$, 则 $\vec{a} > \vec{b}$ D. 若 $\vec{a} = -\vec{b}$, 则 $\vec{a} \parallel \vec{b}$

3. 函数 $y = (3^x - 3^{-x}) \cos x$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 的图象大致为 ()



4. 若 $\cos \alpha = -\frac{24}{25}$, $-\pi < \alpha < \pi$, 则 $\cos \frac{\alpha}{2}$ 等于 ()

- A. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$ B. $-\frac{7\sqrt{2}}{10}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{10}$ D. $-\frac{\sqrt{2}}{10}$

5. 我国古代数学家僧一行应用“九服晷影算法”在《大衍历》中建立了晷影长 l 与太阳天顶距 θ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) 的对应数表, 这是世界数学史上较早的一张正切函数表, 根据三角学知识可知, 晷影长度 l 等于表高 h 与太阳天顶距 θ 正切值的乘积, 即 $l = h \tan \theta$. 对同一“表高”两次测量, 第一次和第二次太阳天顶距分别为 α, β , 且 $\tan(\alpha - \beta) = \frac{1}{3}$, 若第二次的“晷影长”与“表高”相等, 则第一次的“晷影长”是“表高”的 ()

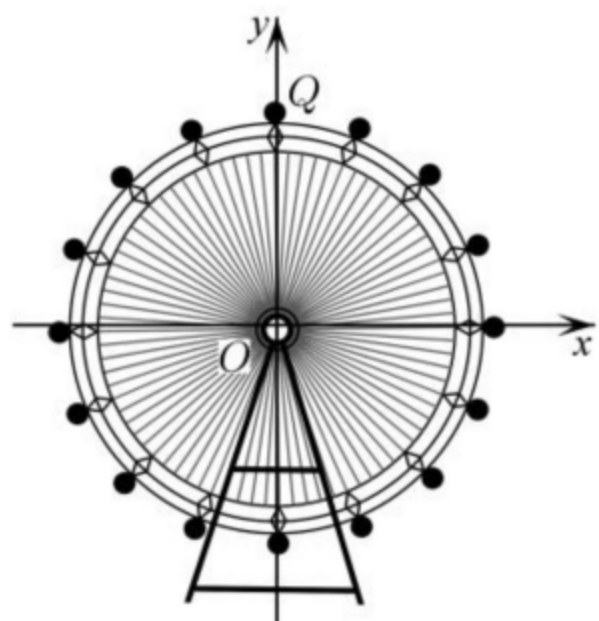
- A. 1 倍 B. 2 倍 C. 3 倍 D. 4 倍

6. 已知曲线 $C_1: y = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$, $C_2: y = \sin x$, 则下面结论正确的是 ()

- A. 把 C_2 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 得到曲线 C_1
 B. 把 C_2 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向左平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位长度, 得到曲线 C_1
 C. 把 C_2 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 得到曲线 C_1

D. 把 C_2 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向左平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位长度, 得到曲线 C_1

7. 如图, 一圆形摩天轮的直径为 100 米, 圆心 O 到水平地面的距离为 60 米, 最上端的点记为 Q . 现在摩天轮开始逆时针方向匀速转动, 30 分钟转一圈, 以摩天轮的中心为原点建立平面直角坐标系, 摩天轮从开始转动一圈, 点 Q 距离水平地面的高度不超过 85 米的时间为()



- A. 20 分钟 B. 22 分钟 C. 24 分钟 D. 26 分钟

8. 若 $2 \sin \beta \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\alpha - \beta + \frac{\pi}{4}\right)$, 则 $\tan(\alpha + \beta) =$ ()

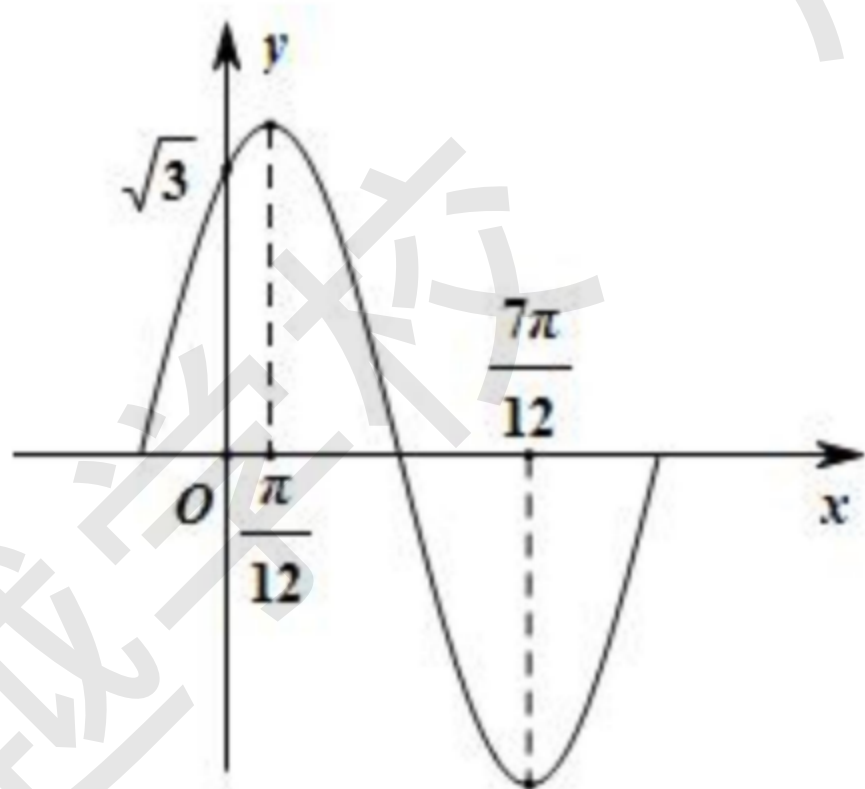
- A. -1 B. 1 C. -2 D. 2

二、多项选择题(本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 3 分.)

9. 计算下列各式, 结果为 $\sqrt{3}$ 的是 ()

- A. $\sqrt{2} \sin 15^\circ + \sqrt{2} \cos 15^\circ$ B. $\cos^2 15^\circ - \sin 15^\circ \cos 75^\circ$
 C. $\frac{\tan 30^\circ}{1 - \tan^2 30^\circ}$ D. $\frac{1 + \tan 15^\circ}{1 - \tan 15^\circ}$

10. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 在一个周期内的图象如图所示, 其中图象最高点、最低点的横坐标分别为 $\frac{\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{12}$ 图象在 y 轴上的截距为 $\sqrt{3}$. 则下列结论正确的是 ()



- A. $f(x)$ 的最小正周期为 2π
 B. $f(x)$ 的最大值为 2
 C. $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right]$ 上单调递增
 D. $f\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ 为偶函数

11. 在 $\triangle ABC$ 中, $3\sin A + 4\cos B = 6, 3\cos A + 4\sin B = 1$, 则 C 的大小不可能为 ()

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

12. 已知函数 $f(x) = 2\sin x |\cos x| + \sqrt{3}\cos 2x$, 则 ()

- A. $f(x)$ 的图像关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称 B. $f(x)$ 的最小正周期是 π
 C. $f(x)$ 在 $[\frac{13\pi}{6}, \frac{5\pi}{2}]$ 上单调递减 D. $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的最小值是 -2

第 II 卷 (非选择题)

三、填空题 (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 已知非零向量 \vec{a}, \vec{b} 满足 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| = 1$, 则 $|\vec{a} + \vec{b}| =$ _____

14. $\frac{\cos 12^\circ - \cos 18^\circ \sin 60^\circ}{\sin 18^\circ} =$ _____.

15. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = \frac{2\pi}{3}$, 则 $\cos A \cos B$ 的取值范围是 _____.

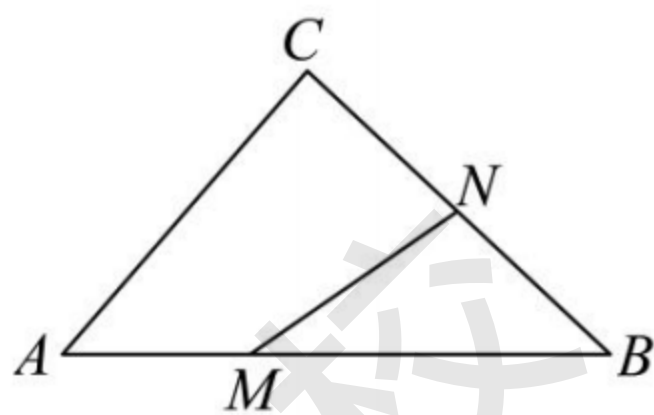
16. 设 $a \in R$, 函数 $f(x) = \begin{cases} \sin(3\pi x - 3\pi a), & x < a \\ -x^2 + 2(a+1)x - a^2 - 5, & x \geq a \end{cases}$, 若 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内恰有 9 个零点, 则 a 的取值范围是 _____.

四、解答题 (本大题共 6 小题, 共 70 分)

17. (10 分) 设函数 $f(x) = \tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$.

- (1) 求 $f\left(\frac{5\pi}{2}\right)$ 的值;
 (2) 求不等式 $f(x) \leq \sqrt{3}$ 的解集.

18. (12 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\overline{AM} = \frac{1}{3}\overline{AB}, \overline{BN} = \frac{1}{2}\overline{BC}$. 设 $\overline{AB} = \vec{a}, \overline{AC} = \vec{b}$.



- (1) 用 \vec{a}, \vec{b} 表示 $\overline{BC}, \overline{MN}$;
 (2) 若 P 为 $\triangle ABC$ 内部一点, 且 $\overline{AP} = \frac{5}{12}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$. 求证: M, P, N 三点共线.

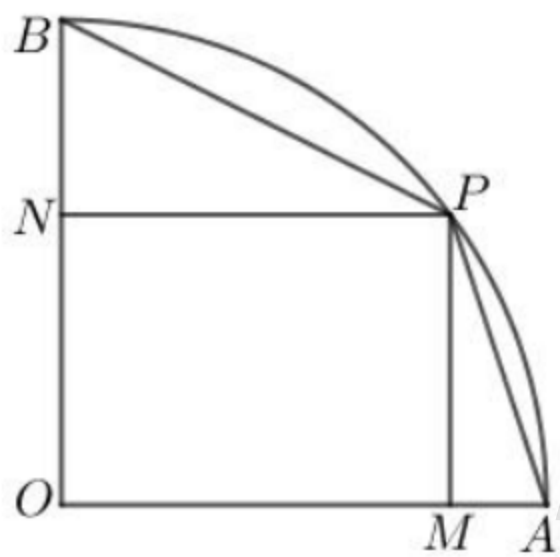
19. (12 分) 已知 $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 且满足 $\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \cos(\alpha + \beta)$.

- (1) 证明: $\tan \beta = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}$;
 (2) 求 $\tan \beta$ 的最大值.

20.(12分) 已知 $\alpha, \beta \in (0, \pi)$, 且 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}, \sin(\alpha + \beta) = -\frac{\sqrt{2}}{10}$.

- (1)求 $\cos 2\alpha$ 和 $\sin 2\alpha$;
- (2)求 $3\alpha + \beta$ 的大小.

21. (12分) 如图有一块半径为1, 圆心角为 $\frac{\pi}{2}$ 的扇形铁皮 AOB , P 是圆弧 AB 上一点(不包括 A, B), 点 M, N 分别半径 OA, OB 上.



- (1)若四边形 $PMON$ 为矩形, 求其面积最大值;
- (2)若 $\triangle PBN$ 和 $\triangle PMA$ 均为直角三角形, 求它们面积之和的取值范围.

22. (12分) 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \pi$), $f(x)$ 图象上相邻的最高点与最低点的横坐标相差 $\frac{\pi}{2}$, _____;

- (1) ① $f(x)$ 的一条对称轴 $x = -\frac{\pi}{3}$ 且 $f(\frac{\pi}{6}) > f(1)$;
- ② $f(x)$ 的一个对称中心 $(\frac{5\pi}{12}, 0)$, 且在 $[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}]$ 上单调递减;
- ③ $f(x)$ 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得到的图象关于 y 轴对称且 $f(0) > 0$

从以上三个条件中任选一个补充在上面空白横线中, 然后确定函数的解析式;

(2) 在(1)的情况下, 令 $h(x) = \frac{1}{2}f(x) - \cos 2x$, $g(x) = h[h(x)]$, 若存在 $x \in [\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}]$ 使得 $g^2(x) + (2-a)g(x) + 3-a \leq 0$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

一. 单选题: 1-4 DDCC 5-8 BC AA

二. 多选题

9. AD 10. BC 11. BCD 12. AC

三. 填空题:

13. $\sqrt{3}$ 14. $\frac{1}{2}$ 15. $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ 16. $(\frac{7}{3}, \frac{5}{2}] \cup (\frac{8}{3}, 3]$

四. 解答题:

17. (1) $f(\frac{5\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) = \tan(-\frac{\pi}{12}) = \sqrt{3} - 2$ (5 分)

(2) 由 $f(x) \leq \sqrt{3}$ 得: $-\frac{\pi}{2} + k\pi < \frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$, (7 分)

解得: $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x \leq \frac{4\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$,

则 $f(x) \leq \sqrt{3}$ 的解集为 $(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi] (k \in \mathbf{Z})$ (10 分)

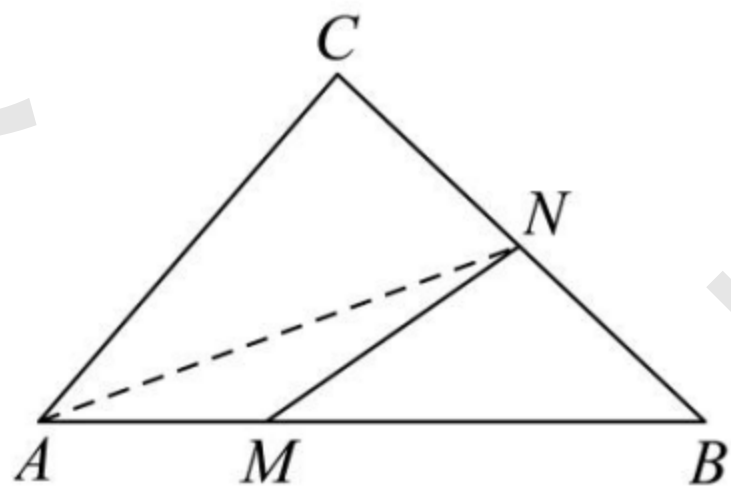
18. (1) 由题图, $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, (3 分)

$\vec{MN} = \vec{BN} - \vec{BM} = \frac{1}{2}\vec{BC} + \frac{2}{3}\vec{AB} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) + \frac{2}{3}\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{a}$ (6 分)

(2) 法一:

由 $\vec{AM} + \vec{AN} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{CN} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \vec{AC} - \frac{1}{2}\vec{BC} = \frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{5}{6}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$, (9 分)

又 $\vec{AP} = \frac{5}{12}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$, 所以 $\vec{AP} = \frac{1}{2}\vec{AM} + \frac{1}{2}\vec{AN}$, 故 M, P, N 三点共线. (12 分)



法二: 由 (1) 得: $\vec{MN} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$,

$\vec{MP} = \vec{AP} - \vec{AM} = \frac{5}{12}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a} = \frac{1}{12}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{MN}$

故 M, P, N 三点共线. (12 分)

19. (1) $\because \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \cos(\alpha + \beta)$
 $\therefore \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$,
 $\therefore \sin \beta = \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta - \sin^2 \alpha \sin \beta$, (3 分)

$\therefore \tan \beta = \sin \alpha \cos \alpha - \sin^2 \alpha \tan \beta$

$\therefore \sin \alpha \cos \alpha = (1 + \sin^2 \alpha) \tan \beta$

$\therefore \tan \beta = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}$; (6 分)

$$(2) \text{ 由 (1) 得: } \tan \beta = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{1 + \sin^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{\tan \alpha}{2 \tan^2 \alpha + 1},$$

$$\because \alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$$\therefore \tan \alpha \in (0, +\infty),$$

由

$$\tan \beta = \frac{\tan \alpha}{2 \tan^2 \alpha + 1} = \frac{1}{2 \tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha}} \leq \frac{1}{2 \sqrt{2 \tan \alpha \cdot \frac{1}{\tan \alpha}}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \dots \dots (10 \text{ 分})$$

$$\text{可得: 当 } \tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 时, } \tan \beta \text{ 取得最大值 } \frac{\sqrt{2}}{4}, \dots \dots (12 \text{ 分})$$

$$20. (1) \because \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}, \text{ 且 } 0 < \alpha < \pi, \therefore \sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ 且 } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}. \dots \dots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = -\frac{3}{5}. \dots \dots (3 \text{ 分})$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{4}{5}. \dots \dots (5 \text{ 分})$$

$$(2) \because 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \pi, \therefore 0 < \alpha + \beta < \frac{3\pi}{2}, \dots \dots (6 \text{ 分})$$

$$\text{又 } \sin(\alpha + \beta) = -\frac{\sqrt{2}}{10} < 0, \therefore \alpha + \beta \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$$

$$\text{故 } \cos(\alpha + \beta) = -\frac{7\sqrt{2}}{10} \dots \dots (8 \text{ 分})$$

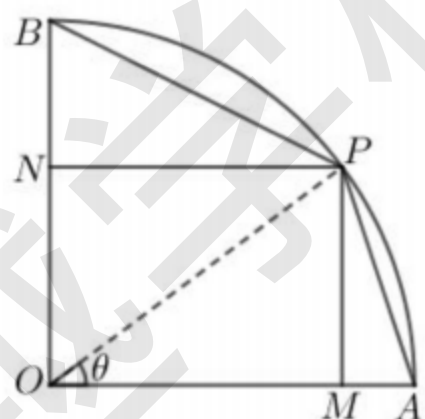
$$\text{又 } 2\alpha \in (0, \pi) \text{ 且 } \cos 2\alpha < 0, \therefore 2\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$$

$$\text{故 } 3\alpha + \beta \in (\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}) \dots \dots (9 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned} \text{又 } \sin(3\alpha + \beta) &= \sin[2\alpha + (\alpha + \beta)] = \sin 2\alpha \cos(\alpha + \beta) + \cos 2\alpha \sin(\alpha + \beta) \\ &= \frac{4}{5}(-\frac{7\sqrt{2}}{10}) + (-\frac{3}{5})(-\frac{\sqrt{2}}{10}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \dots \dots (11 \text{ 分})$$

$$\text{故 } 3\alpha + \beta = \frac{7\pi}{4} \dots \dots (12 \text{ 分})$$

21.(1) 连接 OP , 如图, 令 $\angle AOP = \theta (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$,



因为四边形 $PMON$ 为矩形, 则 $OM = OP \cos \theta = \cos \theta$, $PM = OP \sin \theta = \sin \theta$

于是得 $S_{\text{四边形}PMON} = OM \cdot PM = \cos \theta \cdot \sin \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$, 而 $0 < 2\theta < \pi$,

则当 $2\theta = \frac{\pi}{2}$, 即 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时, $\sin 2\theta$ 取最大值 1,

即 $(S_{\text{四边形}PMON})_{\max} = \frac{1}{2}$, 所以矩形 $PMON$ 面积最大值为 8. $\dots \dots (5 \text{ 分})$

(2) 由(1)知, $PN = OM = \cos \theta$, $ON = PM = \sin \theta$,

则 $BN = 1 - \sin \theta$, $AM = 1 - \cos \theta$

$Rt\triangle PBN$ 和 $Rt\triangle PMA$ 的面积和:

$$S = S_{\triangle PBN} + S_{\triangle PMA} = \frac{1}{2}PN \cdot BN + \frac{1}{2}PM \cdot AM = \frac{1}{2}\cos \theta(1 - \sin \theta) + \frac{1}{2}\sin \theta(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2}(\sin \theta + \cos \theta) - \sin \theta \cdot \cos \theta,$$

令 $\sin \theta + \cos \theta = t$, 即 $t = \sqrt{2}\sin(\theta + \frac{\pi}{4})$, 而 $\frac{\pi}{4} < \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}$, 则 $1 < t \leq \sqrt{2}$,

$$2\sin \theta \cos \theta = (\sin \theta + \cos \theta)^2 - (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = t^2 - 1,$$

$$\text{则 } S = f(t) = \frac{1}{2}t - \frac{t^2 - 1}{2} = -\frac{1}{2}(t - \frac{1}{2})^2 + \frac{5}{8} \quad \dots\dots (10 \text{ 分})$$

显然 $f(t)$ 在 $(1, \sqrt{2}]$ 上单调递减, 当 $t = \sqrt{2}$, 即 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时,

$$f(t)_{\min} = f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}, \text{ 而 } f(1) = \frac{1}{2}, \text{ 因此, } \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \leq S < \frac{1}{2}$$

所以 $Rt\triangle PBN$ 和 $Rt\triangle PMA$ 的面积和的取值范围是: $[\frac{\sqrt{2} - 1}{2}, \frac{1}{2})$. \dots\dots (12 \text{ 分})

22. (1) 由题意可知, 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $T = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$, $\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = 2$.

选①, 因为函数 $f(x)$ 的一条对称轴 $x = -\frac{\pi}{3}$, 则 $2 \times (-\frac{\pi}{3}) + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in Z)$,

$$\text{解得 } \varphi = \frac{7\pi}{6} + k\pi (k \in Z),$$

因为 $|\varphi| < \pi$

所以, φ 的可能取值为 $-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}$.

若 $\varphi = -\frac{5\pi}{6}$, 则 $f(x) = 2\sin(2x - \frac{5\pi}{6})$, 则 $f(\frac{\pi}{6}) = 2\sin(-\frac{\pi}{2}) = -2 < f(1)$, 不合乎题意;

若 $\varphi = \frac{\pi}{6}$, 则 $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$, 则 $f(\frac{\pi}{6}) = 2\sin\frac{\pi}{2} = 2 > f(1)$, 合乎题意.

所以, $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$; \dots\dots (6 \text{ 分})

选②, 因为函数 $f(x)$ 的一个对称中心 $(\frac{5\pi}{12}, 0)$, 则 $2 \times \frac{5\pi}{12} + \varphi = k\pi (k \in Z)$,

$$\text{解得 } \varphi = k\pi - \frac{5\pi}{6} (k \in Z),$$

因为 $|\varphi| < \pi$,

所以, φ 的可能取值为 $-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}$.

若 $\varphi = -\frac{5\pi}{6}$, 则 $f(x) = 2\sin(2x - \frac{5\pi}{6})$, 当 $x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}]$ 时, $2x - \frac{5\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

此时, 函数 $f(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}]$ 上单调递增, 不合乎题意;

若 $\varphi = \frac{\pi}{6}$, 则 $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$, 当 $x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}]$ 时, $2x + \frac{\pi}{6} \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$,

此时，函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递减，合乎题意；

所以， $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ ； (6分)

选③，将函数 $f(x)$ 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得到的图象关于 y 轴对称，

所得函数为 $y = 2\sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \varphi\right] = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3} + \varphi\right)$ ，

由于函数 $y = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3} + \varphi\right)$ 的图象关于 y 轴对称，可得 $\frac{\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ，

解得 $\varphi = \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ，

因为 $|\varphi| < \pi$ ，

所以， φ 的可能取值为 $-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}$ 。

若 $\varphi = -\frac{5\pi}{6}$ ，则 $f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right)$ ， $f(0) = 2\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -1$ ，不合题意；

若 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ ，则 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ ， $f(0) = 2\sin\frac{\pi}{6} = 1$ ，合乎题意。

所以， $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ ； (6分)

(2) 由 (1) 可知 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ ，所以，

$$h(x) = \frac{1}{2}f(x) - \cos 2x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x - \cos 2x$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$$

当 $x \in \left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}\right]$ 时， $0 \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}$ ， $\therefore 0 \leq h(x) \leq 1$ ，所以， $-\frac{\pi}{6} \leq 2h(x) - \frac{\pi}{6} \leq 2 - \frac{\pi}{6}$ ，

所以， $g(x) = h[h(x)] = \sin\left[2h(x) - \frac{\pi}{6}\right] \in \left[\frac{1}{2}, \sin\left(2 - \frac{\pi}{6}\right)\right]$ ，

$\therefore g(x) + 1 \in \left[\frac{1}{2}, 1 + \sin\left(2 - \frac{\pi}{6}\right)\right]$ ， (7分)

$\because \frac{\pi}{2} < 2 < \frac{2\pi}{3}$ ， $\therefore \frac{\pi}{3} < 2 - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$ ，则 $\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin\left(2 - \frac{\pi}{6}\right) < 1$ ，

由 $g^2(x) + (2-a)g(x) + 3 - a \leq 0$ 可得 $g^2(x) + 2g(x) + 3 \leq a[g(x) + 1]$ ，

所以， $a \geq \frac{g^2(x) + 2g(x) + 3}{g(x) + 1} = \frac{[g(x) + 1]^2 + 2}{g(x) + 1} = g(x) + 1 + \frac{2}{g(x) + 1}$ ， (10分)

由基本不等式可得 $g(x) + 1 + \frac{2}{g(x) + 1} \geq 2\sqrt{[g(x) + 1] \cdot \frac{2}{g(x) + 1}} = 2\sqrt{2}$ ， (11分)

当且仅当 $g(x) + 1 = \sqrt{2} \in \left[\frac{1}{2}, 1 + \sin\left(2 - \frac{\pi}{6}\right)\right]$ 时，等号成立，所以， $a \geq 2\sqrt{2}$ (12分)